



TITLE:

にぶい物体をすぎる流れの関数論
的計算 (流体力学における混合境界
値問題)

AUTHOR(S):

堀内, 潔

CITATION:

堀内, 潔. にぶい物体をすぎる流れの関数論的計算 (流体力学における
混合境界値問題). 数理解析研究所講究録 1979, 360: 22-48

ISSUE DATE:

1979-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104527>

RIGHT:

にぶい物体をすぎる流れの関数論的計算

東大 工 堀 内 潔

§ 1. いとぐち と 定式化

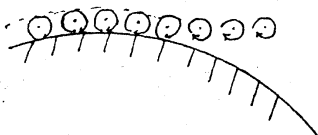
レイノルズ数の高い場合のにぶい物体をすぎる流れの様子を知ることは、流体力学における最も重要な問題の一つである。

その一つの手段は、ナビエ・ストークス方程式を解くことであるが、その非線形性のために、解析的に解くのは難かしい。また、数値的に、例えば、差分法で解こうとすると、そうした流れの場においては、速度勾配が大きいために格子点の数を非常に多くとる必要が生じ、計算時間が膨大になってしまう。現在のところ、信頼すべき計算は、高々 $Re = 1000$ 程度のものについてしかない。

ところで、そうした高い Re の場合、粘性が重要な役割を果たすのは物体表面の境界層に限られる。そして境界層で渦が生成され、流れの中にはきたされて伴流領域が形成される。

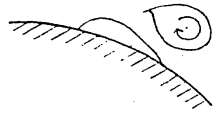
そこで、この渦の動きを適切に扱える方法があれば、差分法等を用いなくても計算ができるようになる。そうした方法の一つとして渦系近似法とよばれるものがある。平板をすぎる流れについては、この方法はすでに適用され、計算の手段も確立されている^{(1), (2), (3)}。しかし、なめらかな表面をもつ物体をすぎる流れにおいては、剥離点を定めるのが難かしいため、平板ほど簡単にはいかない。今日までに、円柱をすぎる流れについて、幾つかの研究がなされているが^{(4)~(8)}、最近になって、桑原⁽⁹⁾は、境界層そのものを渦系で近似する方法によって、非常に良い結果を得た。そこで、本論文では、同じ理念に基づき、楕円柱が、静止状態から急に一定速度で動き出した場合の流れを計算した。

この場合、渦は次のように生成されると考えられる。動き出した瞬間には、流れは渦無しとして扱ってよく、外部流に渦はない。しかし、物体表面上では流体は静止しているから、ここに無限に薄い境界層が存在する。この層では速度は急激に変化しており、物体表面側は止められて、層の上端は動くため、巻きこみをおこすことによ、て、いわば、流体の



"コロ"が無数にできあがる。そして、これらが表面にそってこるがり動き、ついには流れの領域に

はき出される。そこで、この“エロ”を渦糸で置きかえようというのが本論文の理念である。すなわち、渦層をいくつかの部分に分け、各々を一つの渦糸で置きかえるのである。その強さは、その部分のもつ循環にちょうど等しくなるようにし、位置は、楕円柱表面から少し離しておく。この際、境界条件を合わせるために、鏡像の位置に同じ強さの逆向きの渦糸をおかなくてはならない。そうすると、これらの渦糸は、最初のポテンシャル流れと、渦糸各々の相互作用に従って動く。ある程度時間がたつと、渦糸は表面から離れるが、この



間に、境界層は新たに成長を続けるため、別な“エロ”ができあがる。そこで、再び渦糸で置きかえるのである。

こうした操作を繰り返していくと、渦糸群の大きなかたまりが形成され、カルマン渦列状の配列ができゆく。

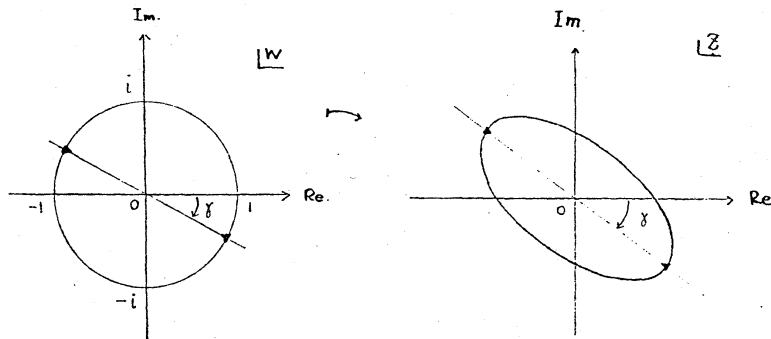
§ 2 計 算 手 順

計算は楕円を円に写像する等角写像を用いて行なう。その写像は、

$$z = \frac{1}{2} \left(a w + \frac{1}{a e^{2i\gamma} w} \right)$$

で与えられる。ここに、 z は楕円の点を示し、 w は円の点を示す。また、 γ は楕円柱の迎え角、 a は楕円柱の形を

決めるパラメーターである。両面は、下図のように対応し、



楕円の長軸の両端点は、 $w = \pm e^{-i\gamma}$ になっている。

w 面における複素速度ポテンシャル $f^{(n)}(w)$ は、

$$f^{(n)}(w) = \frac{a}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) + i \sum_{j=1}^n k_j \log(w - w_j) - i \sum_{j=1}^n k_j \log(w - w_j^*)$$

$$(w_j^* \equiv 1 / \overline{w_j})$$

である。

ここに、 k_j は j 番目の渦系の強さ、 w_j はその位置である。
 n は、流れの領域にある渦系の個数で、文字の上につけた $-$ は、複素共役をとることを示す。また、座標系は、円柱に固定してある。

第一の項は、最初の瞬間に与えたポテンシャル流れ、第二の項は、生成された渦系による流れ、第三の項は、境界条件を合わせるためにおいた鏡像の渦系による流れに対応する。

楕円柱が動き出した瞬間にできる境界層は非常に強いと考えられるので、上下兩半面を各々比較的多数個の渦系で近似する。 w 平面で円周を等しい長さの $2M$ 個の部分に分け、各

々の中点の表面から ε だけ離れた位置

$$W_j = (1 + \varepsilon) e^{[2\pi i (j - \frac{1}{2}) / 2M]} \quad (j=1, \dots, 2M)$$

に渦系を置く。その強さは、

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{2M}$$

$$\left(\text{但, } \Phi_j = \operatorname{Re} \{ f^{(2M)}(e^{2\pi i (j) / 2M}) \} \right)$$

にしたがって与える。これは、本来はいたる所で0である楕円柱表面の速度を平均的に0にすることに相当する。

z 平面での運動方程式は、複素形式で、

$$\frac{d\bar{z}_i}{dt} = \left. \frac{df_i}{dz} \right|_{z=z_i} \quad \text{である。ここに、}$$

z_i は i 番目の渦系の位置を示し、 f_i は、その渦系による項のみを除いた(しかし、鏡像は含めた)複素速度ポテンシャルを表わす。この運動方程式は、 W 平面では、

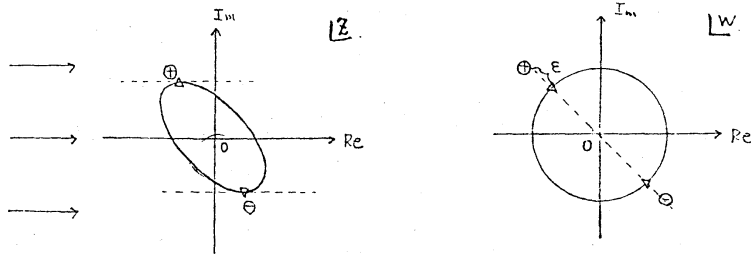
$$\frac{d\bar{W}_i}{dt} = \left. \frac{df_i}{dW} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 \right|_{W=W_i} \quad \text{となる。}$$

計算上は、この方程式の左辺を、単純前進差分 $\Delta\bar{W}_i / \Delta t$ でおきかえている。

$t = \Delta t$ 以後は、上下両半面の境界層を、1個ずつの渦系で置きかえる。境界層を近似するには、多数個の渦系を置くことが望ましい。しかし、計算時間は、鏡像も含めた渦系の総数の2乗にほぼ比例するため、実際上はあまり増や

することはできない。

次に渦系を置く位置は次のようにする。桑原^{a)}は、円柱についての計算の中で、渦系をどこから発生させても、後流の流れの様子は、ほとんど変わらないことを明らかにした。そこで、この計算では、楕円柱の一樣流に対する両端点の近く、円柱上で、両端点に対応する点から ε だけ離れた2点、(以下、 $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ とする) に置くことにした。



$t = \Delta t$ 以後、この操作を繰り返すのであるが、 $t = N(\Delta t)$ から、 $t = (N+1)\Delta t$ に計算を進める際に出す渦系の強さは、次のようにして決める。複素速度ポテンシャル $f^{(2M+2N+2)}(W)$ は、

$$f^{(2M+2N+2)}(W) = f^{(2M+2N)}(W) + i \sum_{j=1}^2 \kappa_{2M+2N+j} \{ \log(W - W^{(1)}) - \log(W - W^{(2)*}) \}$$

となる。この f にしたがって

$$\Phi_j = \operatorname{Re} \{ f^{(2M+2N+2)}(e^{j\pi i}) \} \quad (j=1, 2)$$

とし、 $t=0$ のときと同様に、

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

により決める。

これらの渦系群は、先の運動方程式に従って動く。この際
差分化にする誤差のため、渦系が楕円柱の中に入ることが

起きる。 $t = t_n$ でこれが起きたとする

と、元の時間間隔を 2^l (l は整数)

等分し、入らなくなる時点まで戻って

計算をやり直すようにしている。



楕円柱に働く抵抗と揚力は、一般化されたブラジウスの公
式

$$D - iL = i\rho \oint \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} d\vec{z} + \frac{1}{2} i\rho \oint \left(\frac{d\vec{f}}{dz} \right)^2 dz$$

によって求めた。ここに、 D は抵抗、 L は揚力、 ρ は密度
を表わし、積分路は楕円の周にとる。計算の結果は、

$$\begin{aligned} D - iL = & \rho a \pi i \sum_j \kappa_j \left\{ \frac{1}{w_j^2} \frac{dw_j}{dt} + \frac{e^{2i\delta}}{a^2} \frac{1}{w_j^2} \frac{dw_j}{dt} \right\} \\ & + 2\pi\rho i \sum_j \kappa_j \left\{ \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{w_j^2} \right) - i \sum_k \frac{\kappa_k}{w_j - w_k^*} \right\} \frac{2ae^{2i\delta} w_j^2}{a^2 e^{2i\delta} w_j^2 - 1} \end{aligned}$$

となる。

§ 3. 計算結果と実験との比較

§ 2 で示した手順に従って、長軸と短軸の長さの比が
2:1 なる楕円柱について、迎え角が、 0° , 45° , 90°

の各場合について、

$$M = 18, \quad \varepsilon = 0.025, \quad \Delta t = 0.2$$

として計算した結果を以下に示す。この場合、 $\alpha = \sqrt{3}$ となり、一様流の速さは1、楕円柱の長軸の長さは $4/\sqrt{3}$ となる。また、渦糸が境界層の中央に位置するとすれば、境界層の厚さ δ が、ほぼ $4\sqrt{\nu x/\bar{u}}$ (x は前方淀み点と剥離点の物体表面にそった距離、 \bar{u} は楕円柱表面の平均速度) で与えられることから、レイノルズ数はおよそ 10000 に相当する。

又、実際に水槽を用いた実験も行ない、数値計算の結果と比較した。

(1) 迎え角が 45° の場合

図Iは、 T 秒後の渦糸の位置を示し、流跡線に対応する。

図IIは、一様流にのった座標系から見た T 秒後の瞬間流線を示す。図Iを見ると、時間がたつにつれて、生成された渦糸が楕円柱の後方にたまり始める様子がわかる。最初に下側の渦糸が大きなかたまりを形成し、独立渦となつて出発する。すると、今度は上側の渦糸がかたまりを形成しはじめ、ある大きさに達すると独立渦となつて流される。こうした動きが繰り返されてカルマン渦列状の渦糸の配列ができてゆくが、顕著なことは、3番目のかたまりが長く伸びて2番目のかた

まりと絡み合いながら流されている事である。この傾向は、図Ⅱからもわかる。そこで、実際に水槽を用いた実験も行って見た。その結果を図Ⅲに示す。実験は、長軸が4cm、短軸が2cmの真ちゅう製の楕円柱表面に生クリームを塗り、160cm×30cm×30cmの透明アクリル製の水槽中を、行程長150cmの台車に取り付けて曳航し行なった。写真は速度1.73 cm/secで動かしたもので、 Re はおよそ200である。写真に見える線は、流跡線に相当する。3番目の渦が長く伸びる傾向は写真にも示されている。又、渦系は、一様流に対する両端点から発生させているにもかかわらず、離れるべき位置に立ち返って離れて行くようすがわかる。図Ⅷに、計算の抵抗係数 C_D 及び、揚力係数 C_L のグラフを示す。ここに

$$C_D = D / (\frac{1}{2} \rho L_0 U^2) , \quad C_L = L / (\frac{1}{2} \rho L_0 U^2)$$

である。 L_0 は楕円柱の長軸の長さを、 U は一様流の速さを表わす。

(2) 90° の場合

流跡線を、図Ⅳに、楕円柱に固定した座標系から見た流線を図Ⅴに、実験を図Ⅵに示す。

$T = 26.0$ まで上下両側の渦系のかたまりは、ほぼ対称に成長して行くが、28.0から、下側が独立渦を形成しはじめる。 C_D , C_L のグラフを図Ⅸに示す。

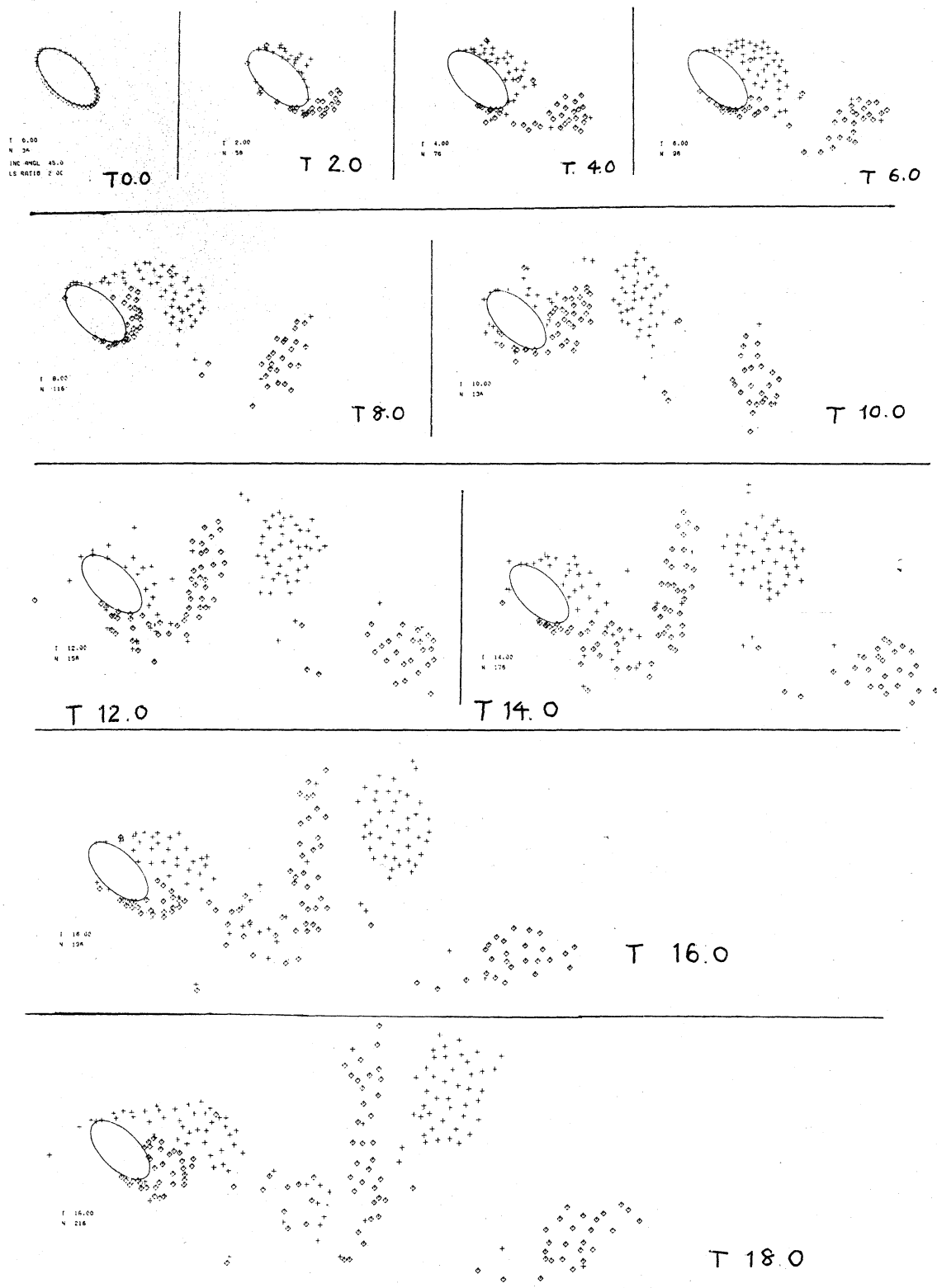
(3) 0° の場合.

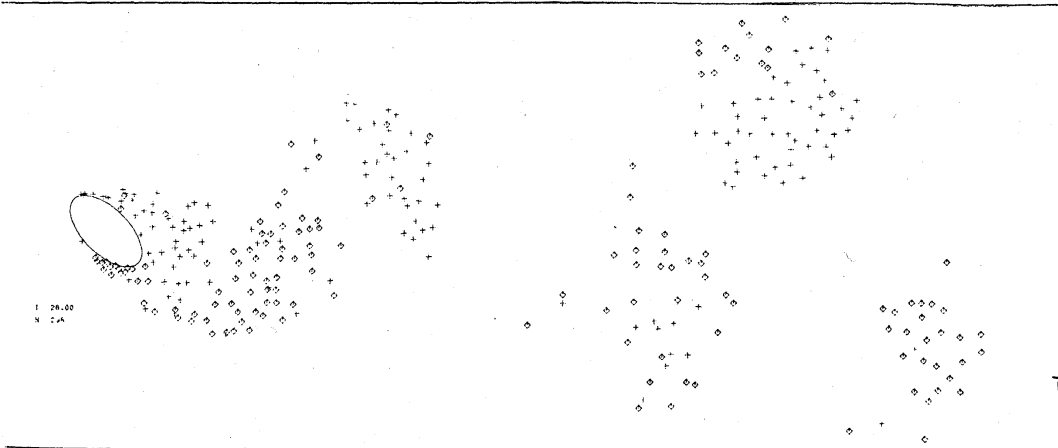
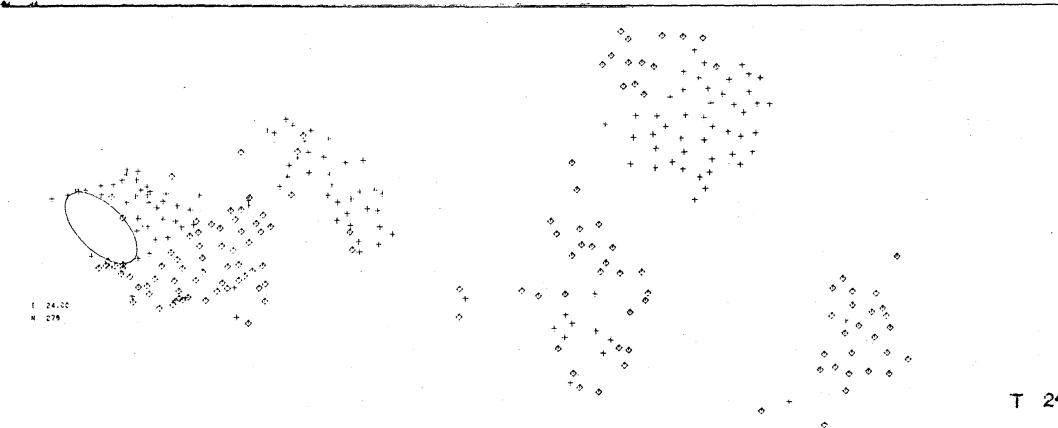
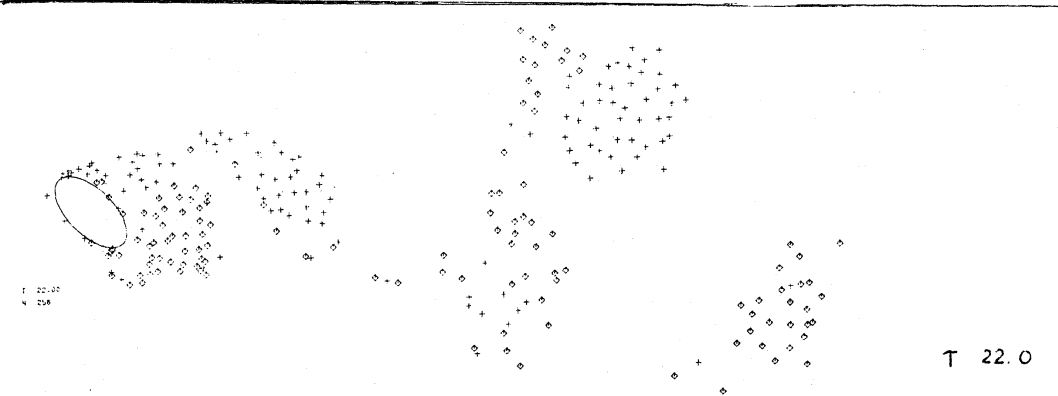
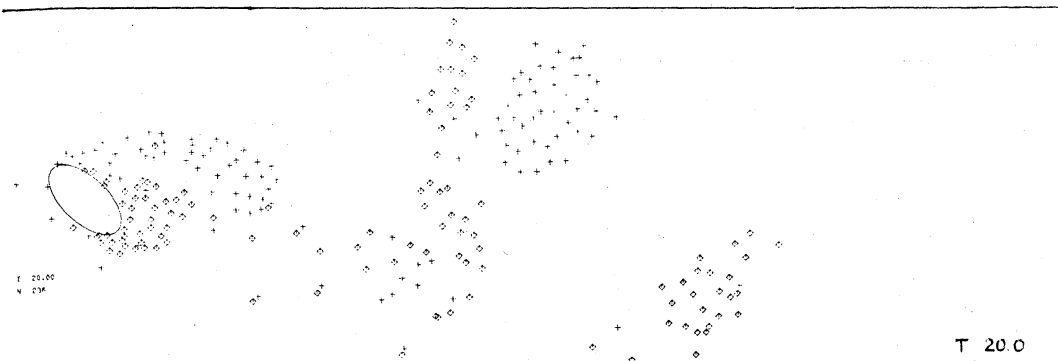
流跡線を 図 VII に, C_D, C_L のグラフを 図 X に示す.
枚数の通号で, 実験の写真は省く.

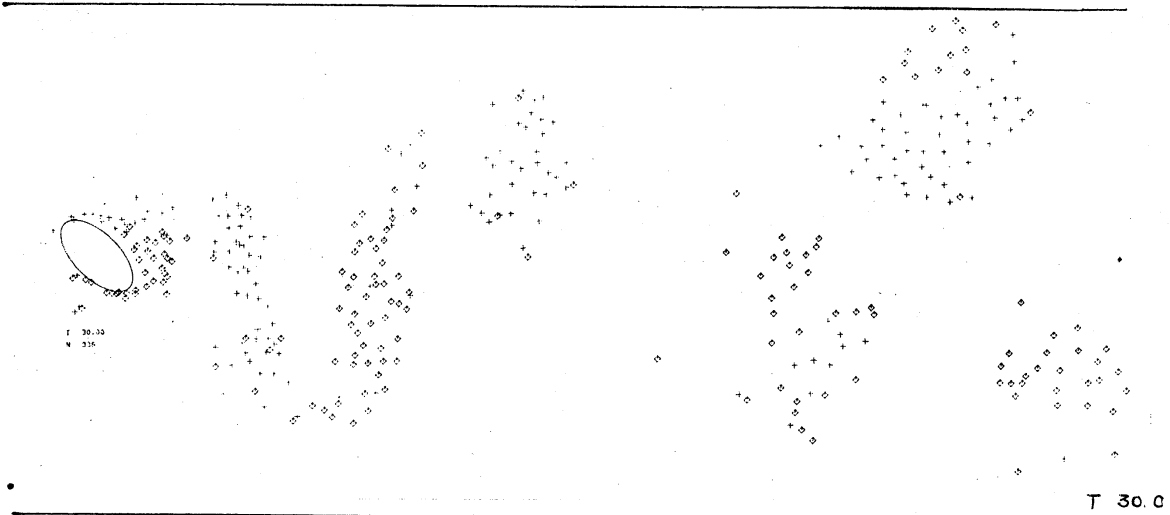
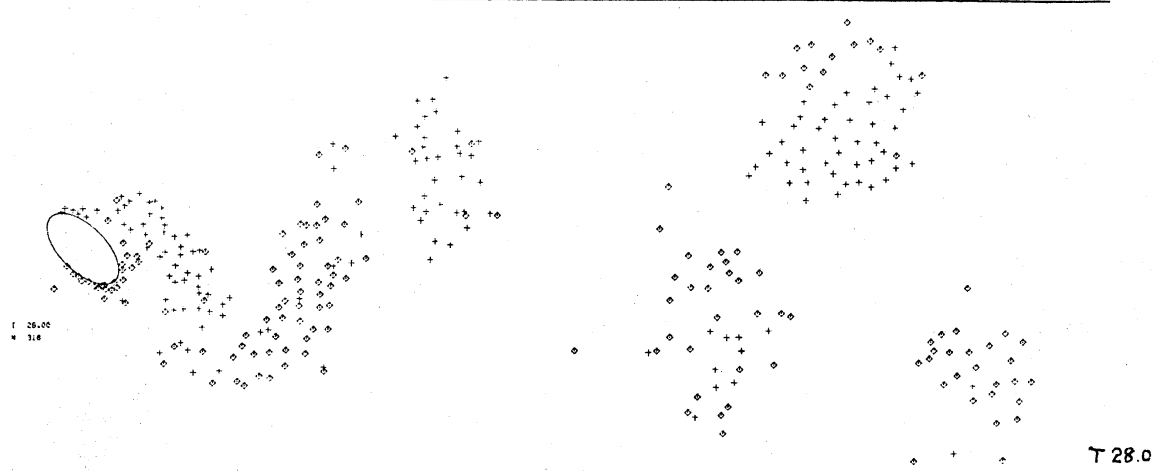
§ 4. まとめ.

§ 3 に見るように, 数値計算によって, 高レイノルズ数の場合, にぶい物体の後方にできる渦列は, カルマンが考えたような固定的なものでなく, 隣り合う大きな渦が互いに作用を及ぼしあって変形していくものであることがわかった. そして, この点は, 実際の実験でも確かめられた. 両者がこうした一致を見せるということは, 本論文で扱った手法が実際の現象の本質をとらえていると考えてよからう. すなわち, 高レイノルズ数の流れにおいては, 境界層ができて渦が生成され表面からはがれていくという事実が本質的なのである. さらに, この近似法が特異点の集合を用いる方法なので流線のようなものがうまく表現できるとは一見思われぬが, 実際に流線を書いてみると, 特異点の集まりという性質があもてにあらわれず, 通常の差分法による結果と同等に見やすい流線が, 流跡線と共に得られた. 従って, 十分高いレイノルズ数の流れについては良好な近似法であると思われる.

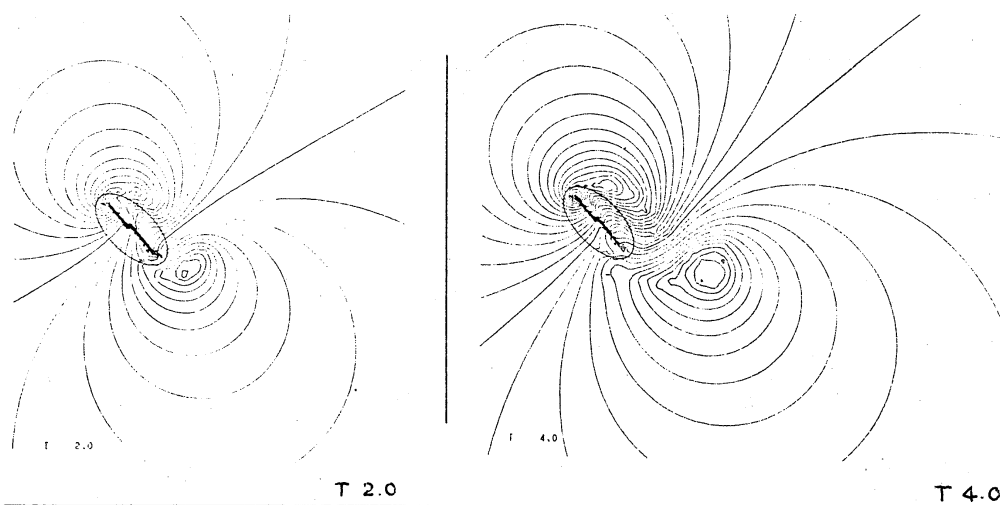
☒ I.

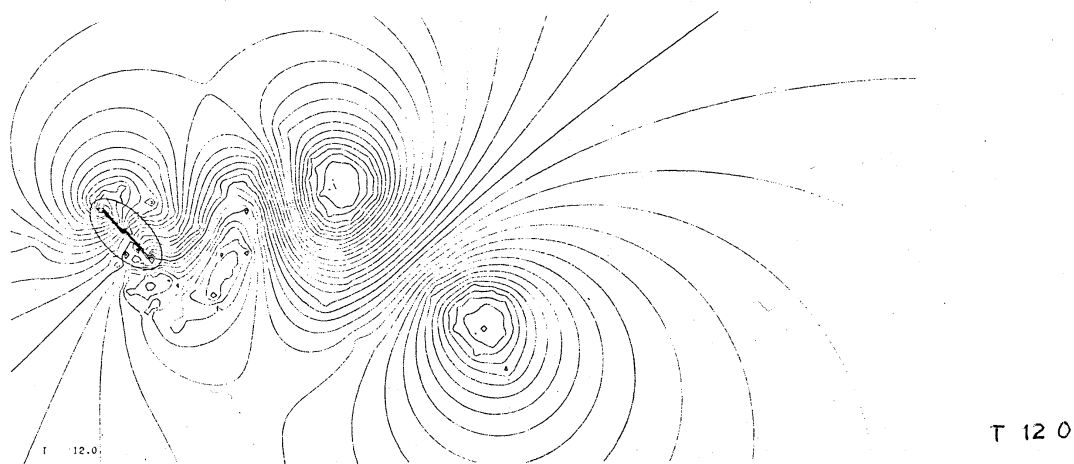
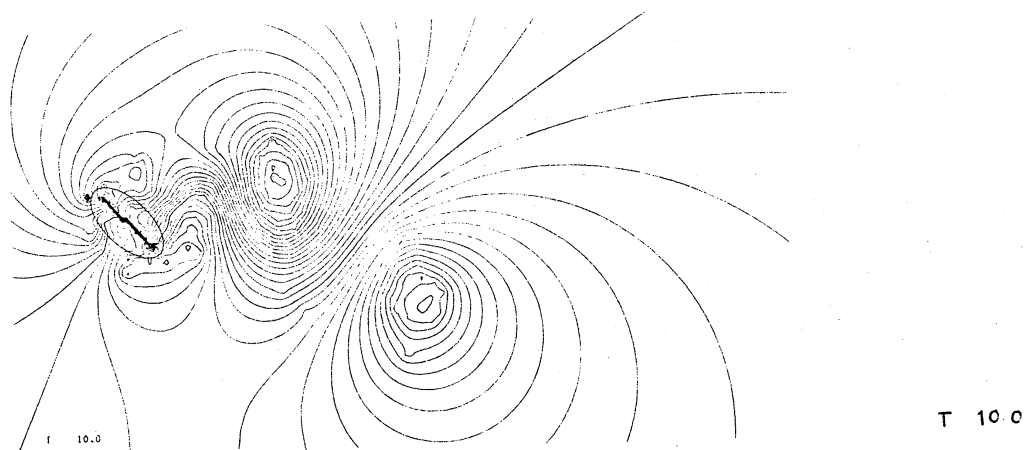
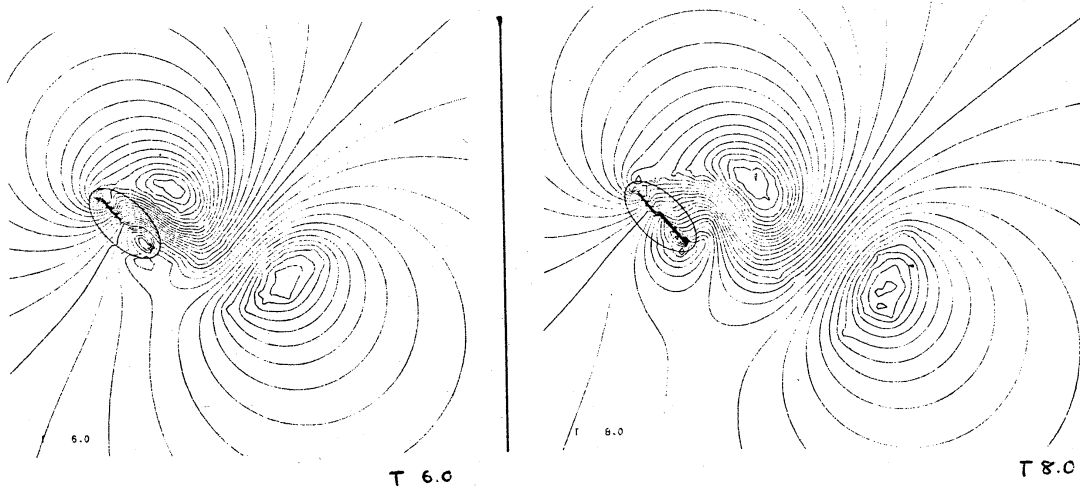


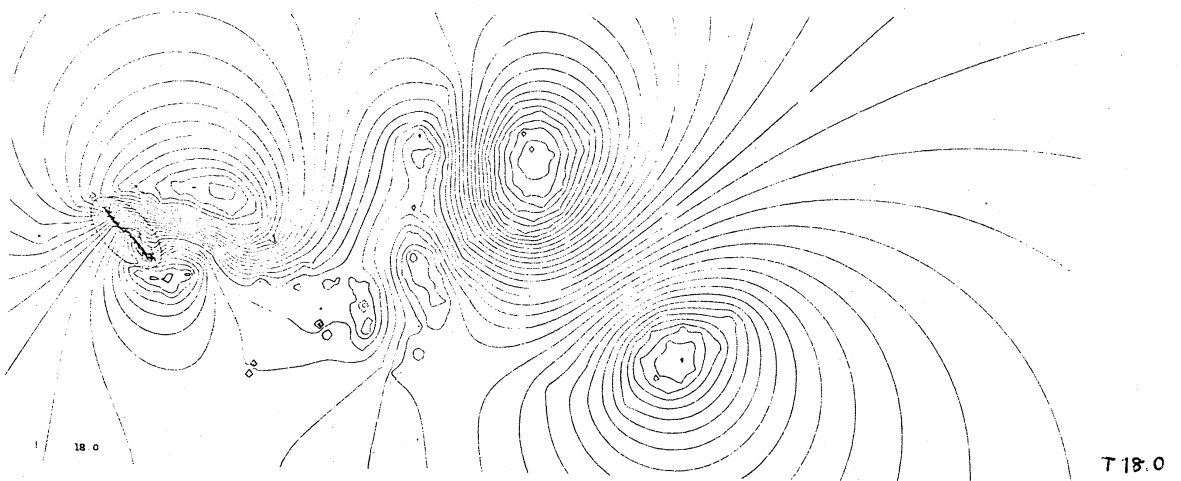
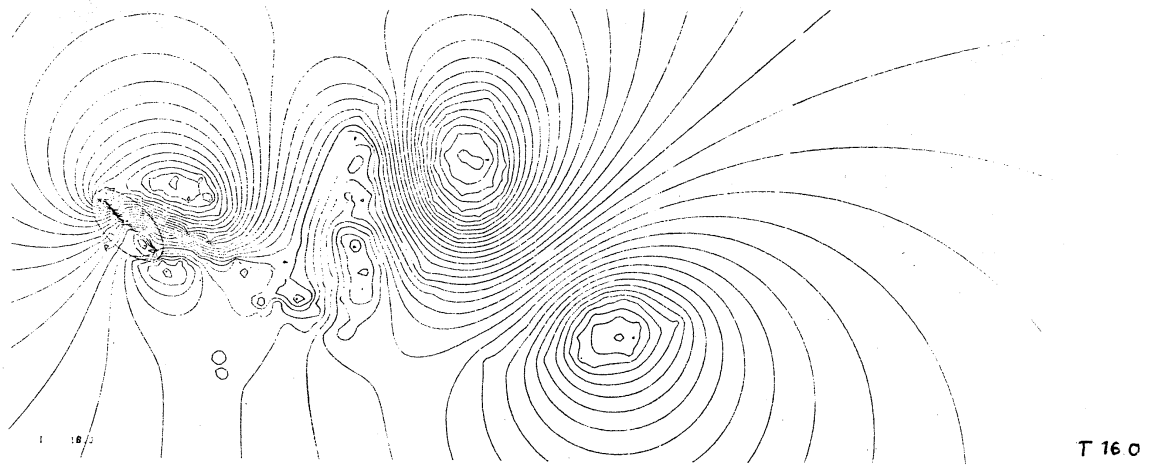
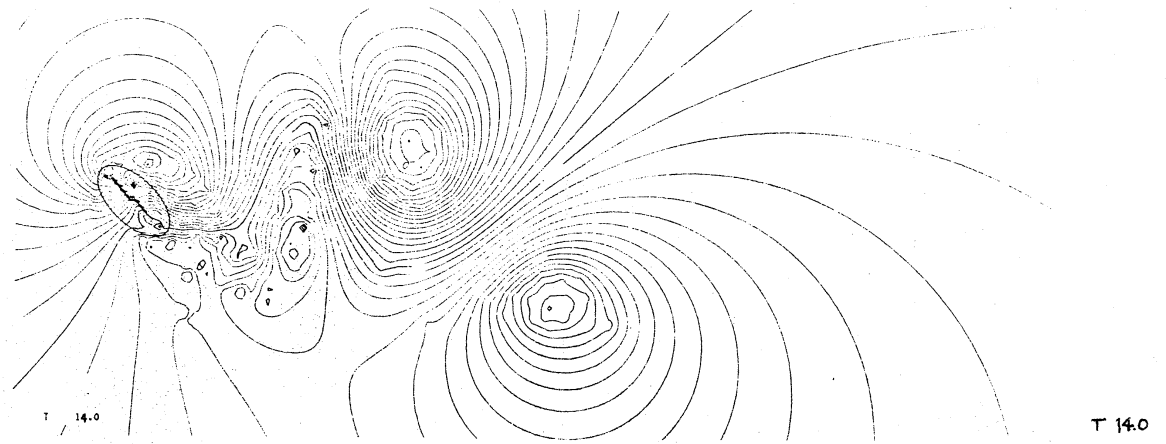


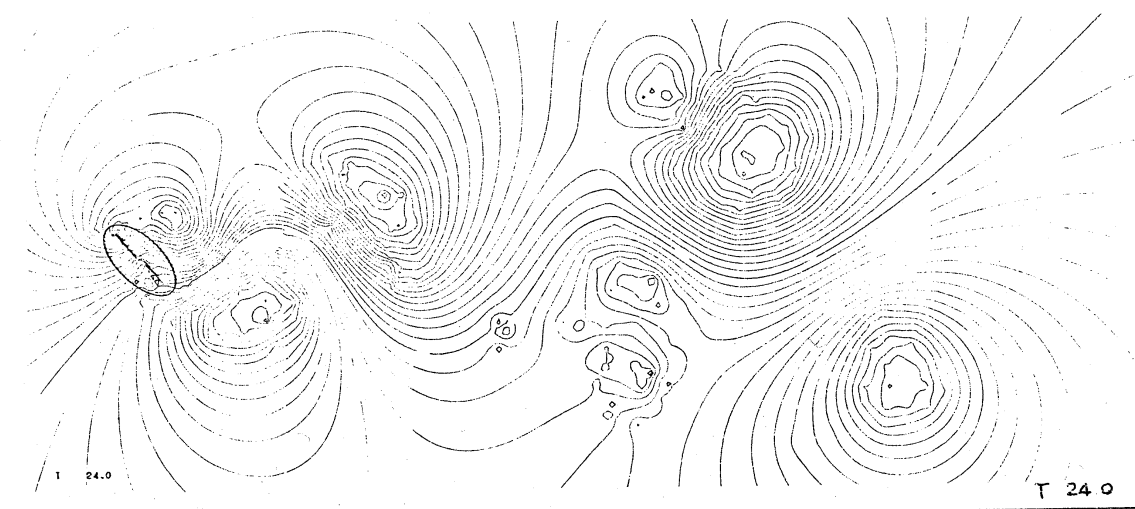
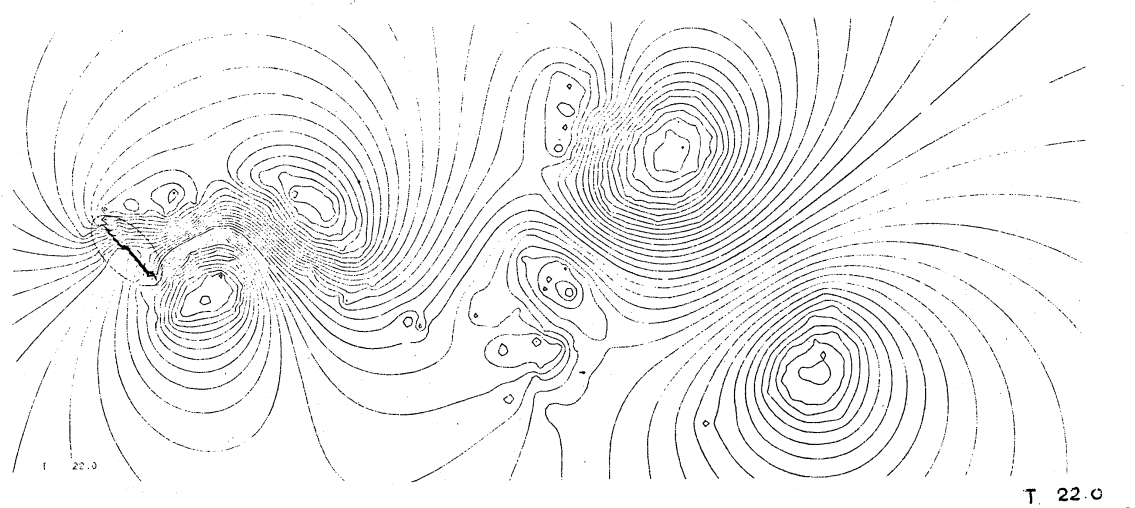
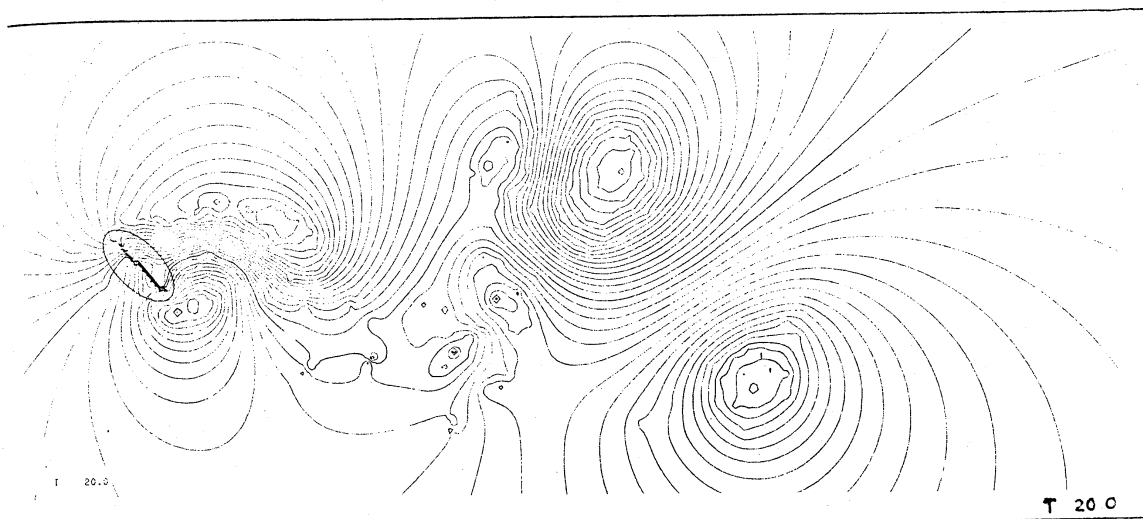


图·II









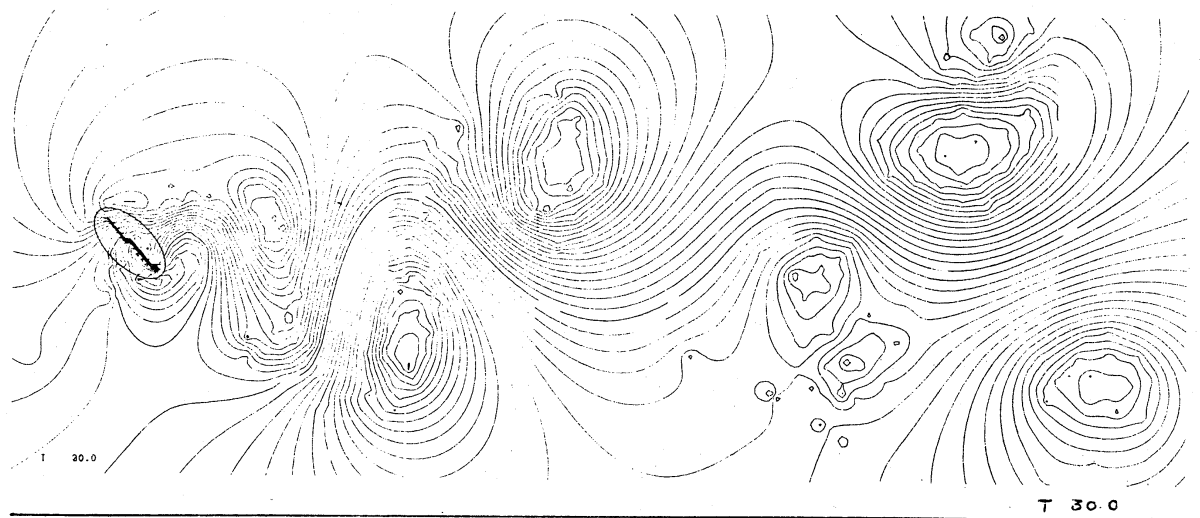
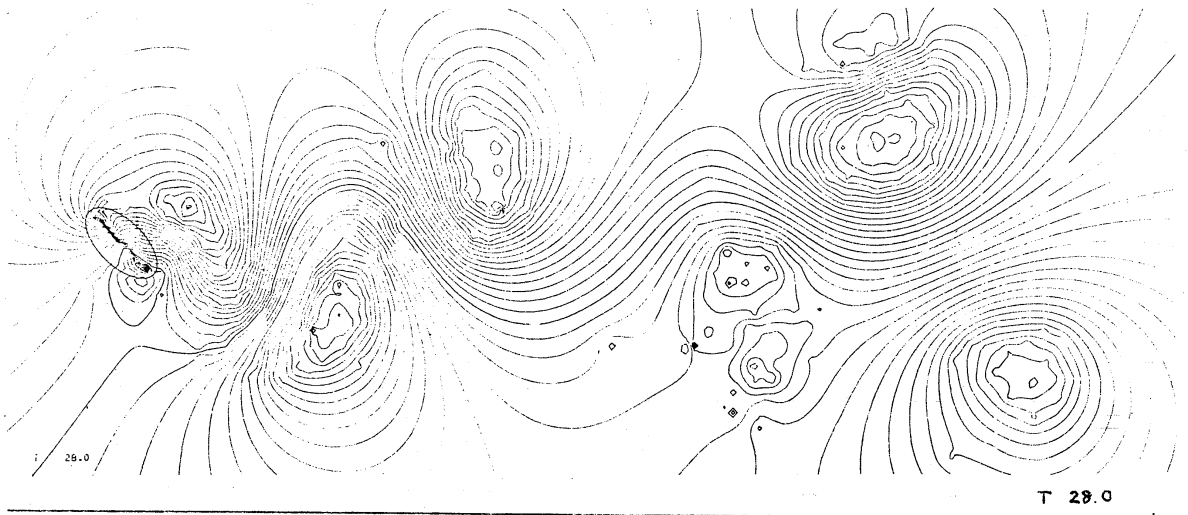
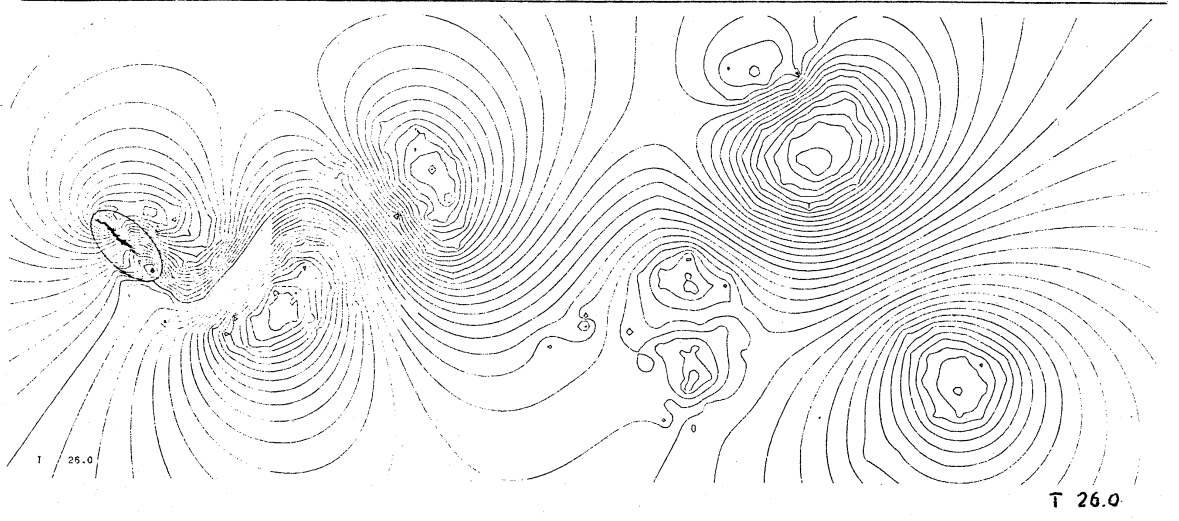


图 III



1



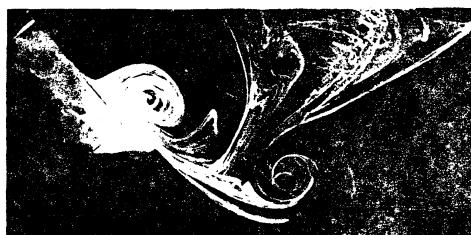
2



3



4



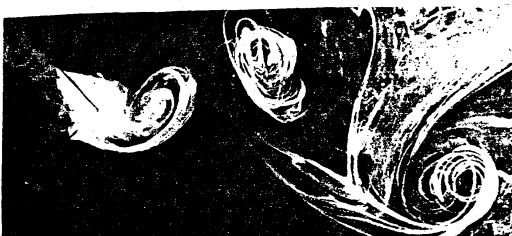
5



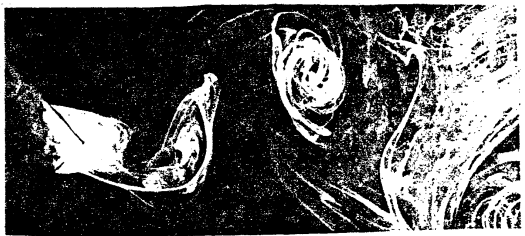
6



7



8



9



10



11

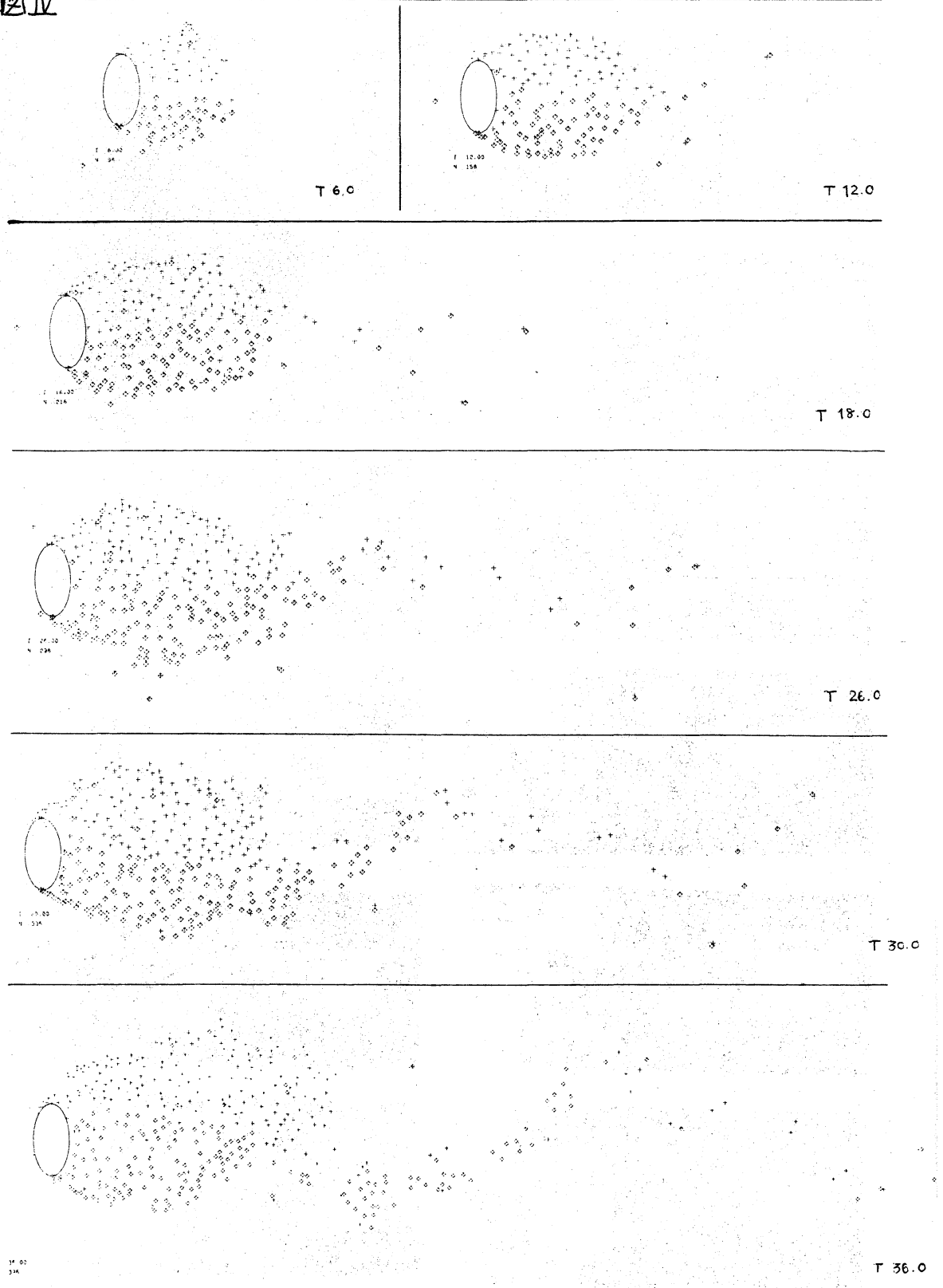


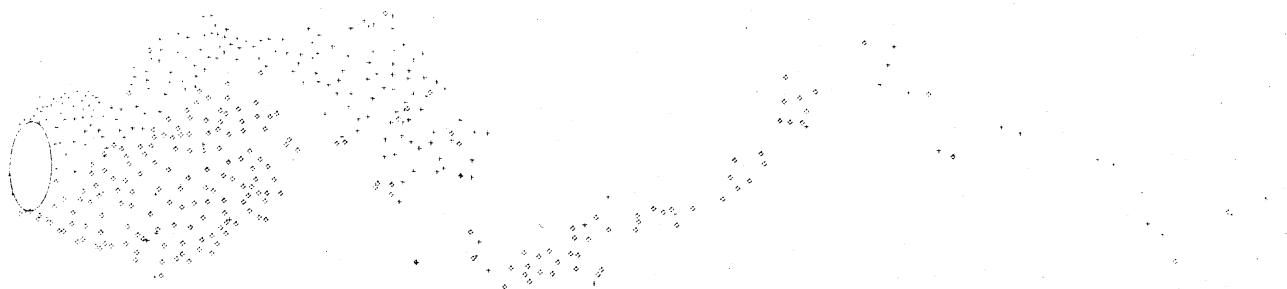
12



13

IV

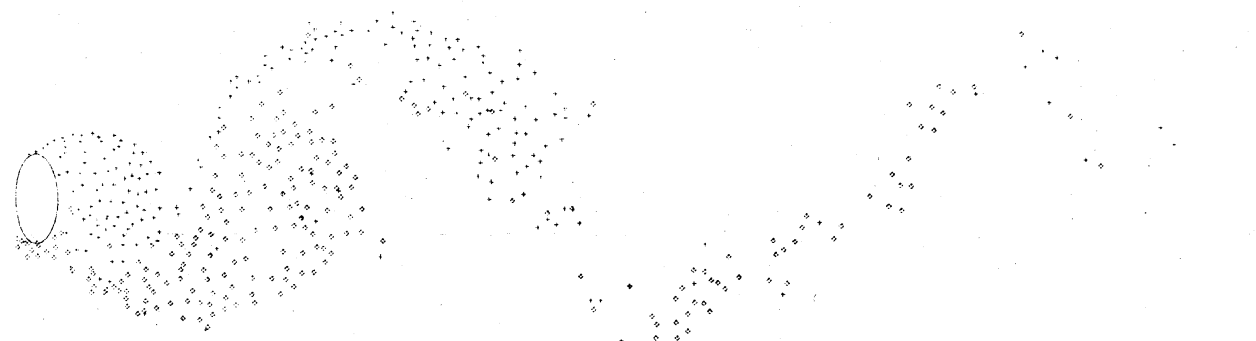




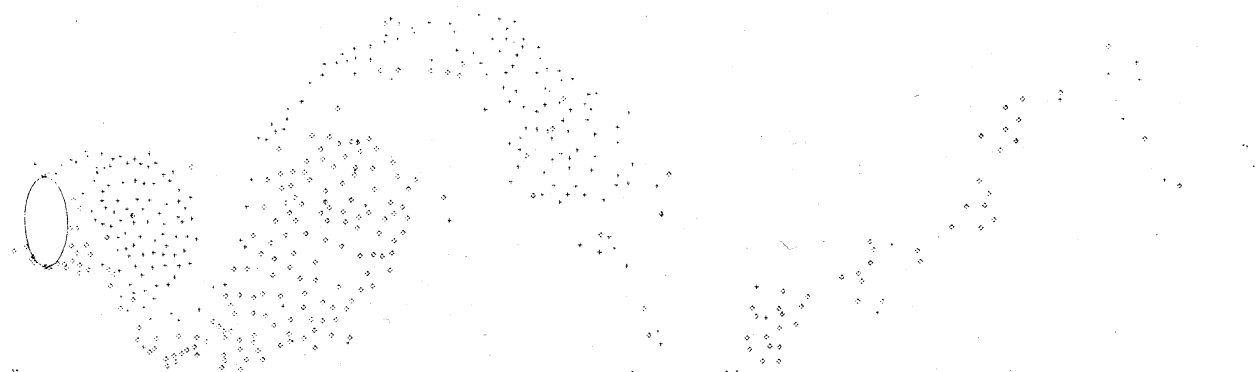
T 40 0



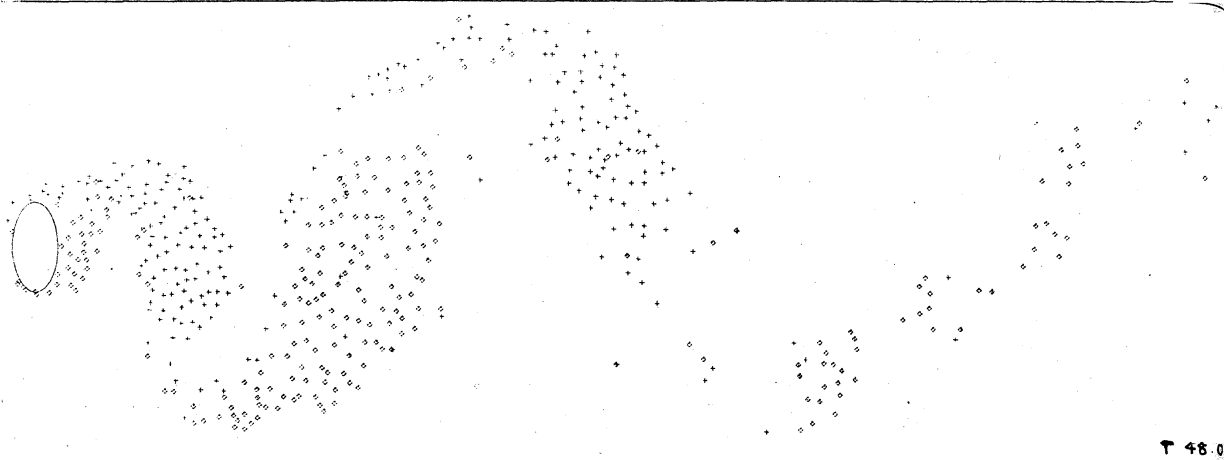
T 42.0



T 44 0

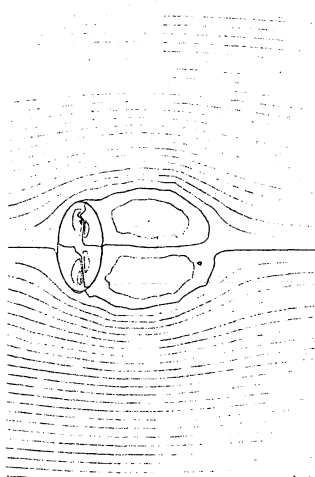


T 46 0

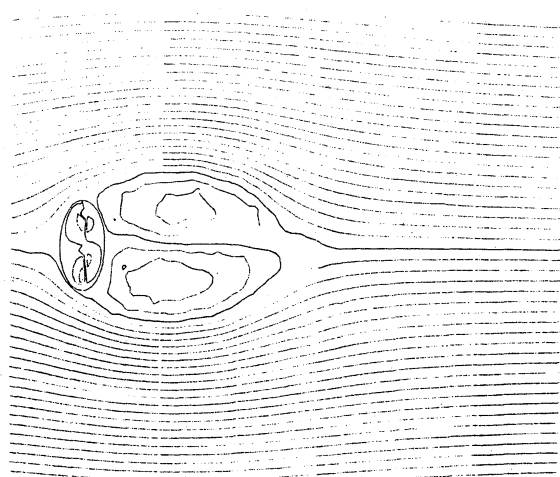


T 48.0

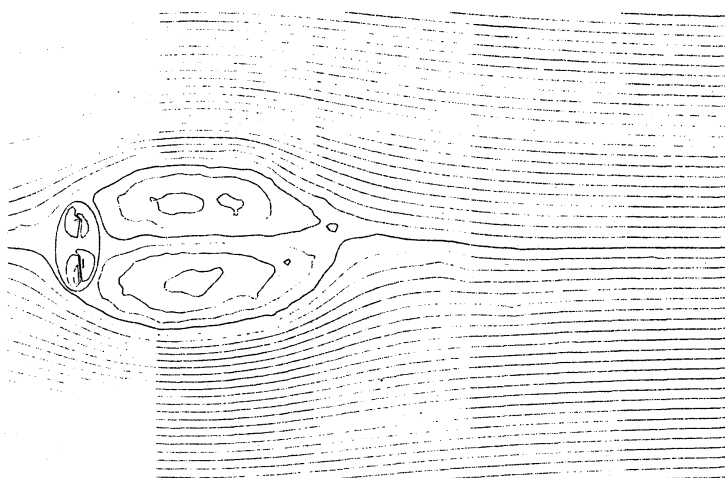
☒-V



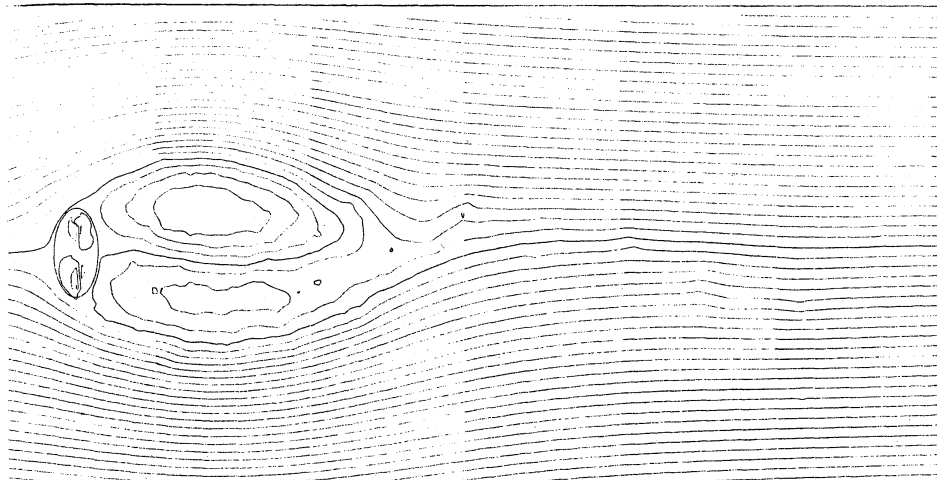
T 6.0



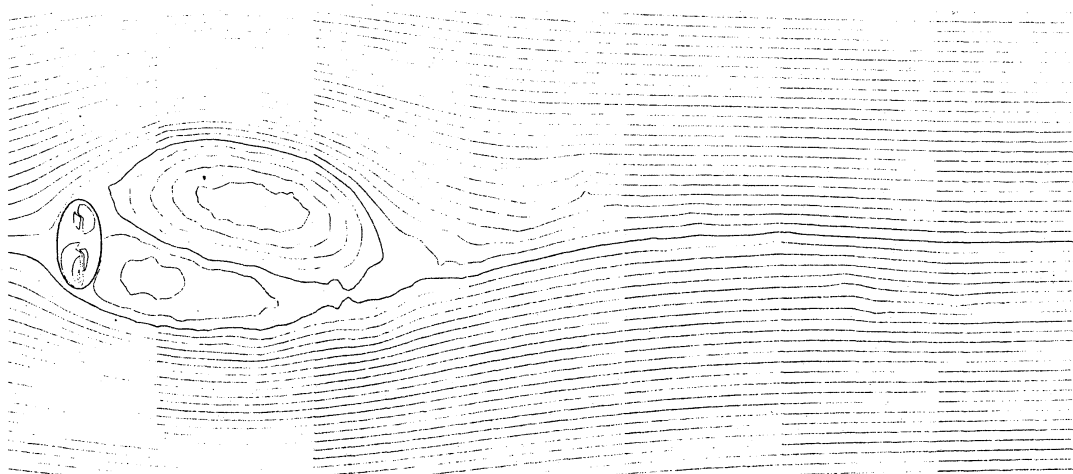
T 12.0



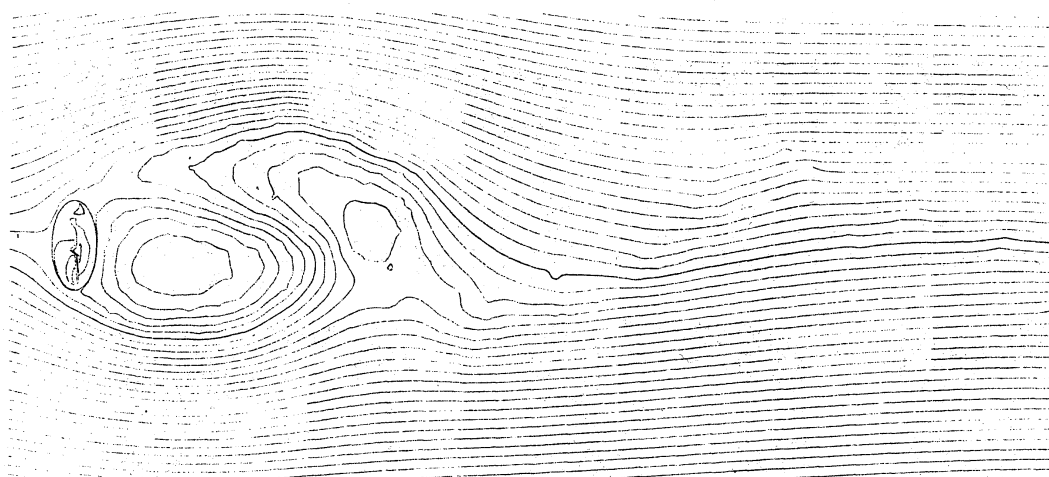
T 18.0



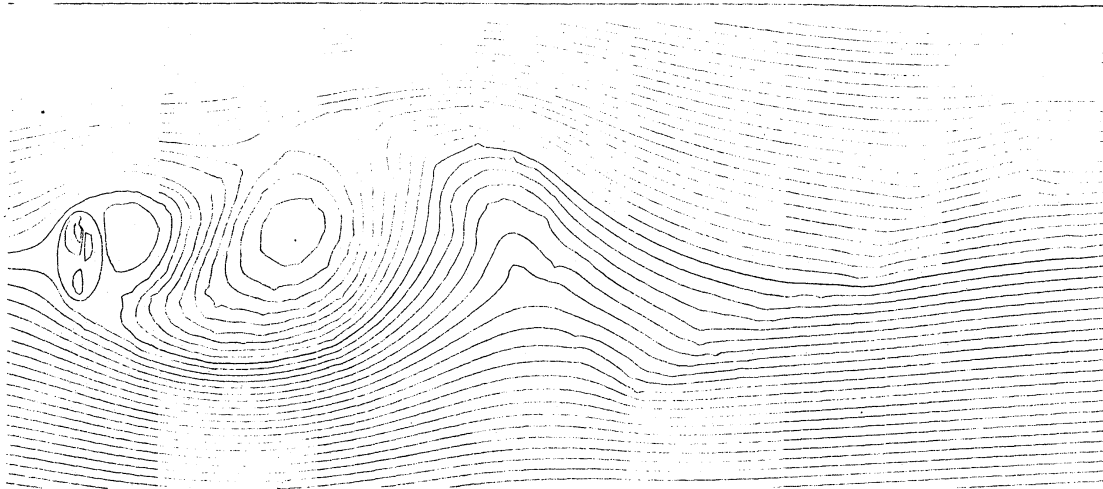
T 26.0



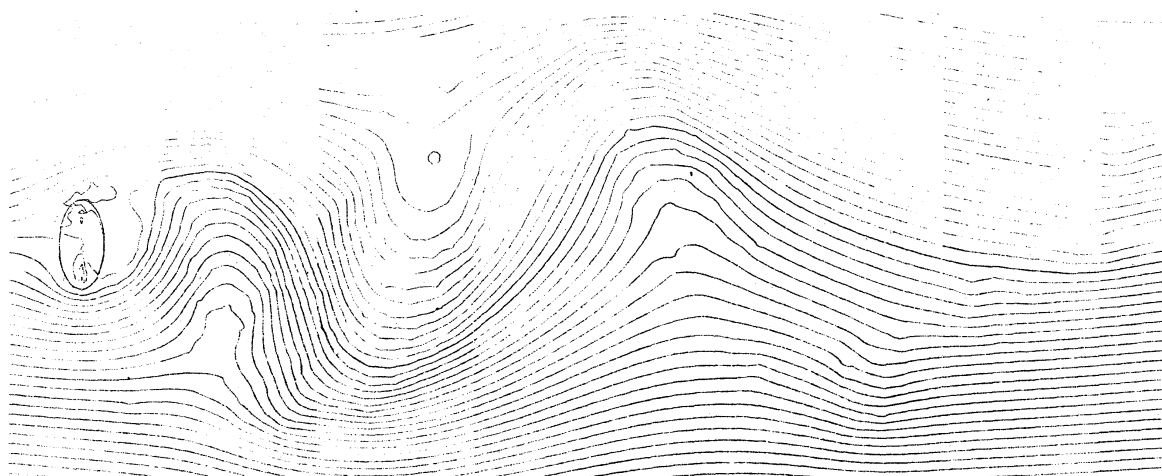
T 30.0



T 36.0

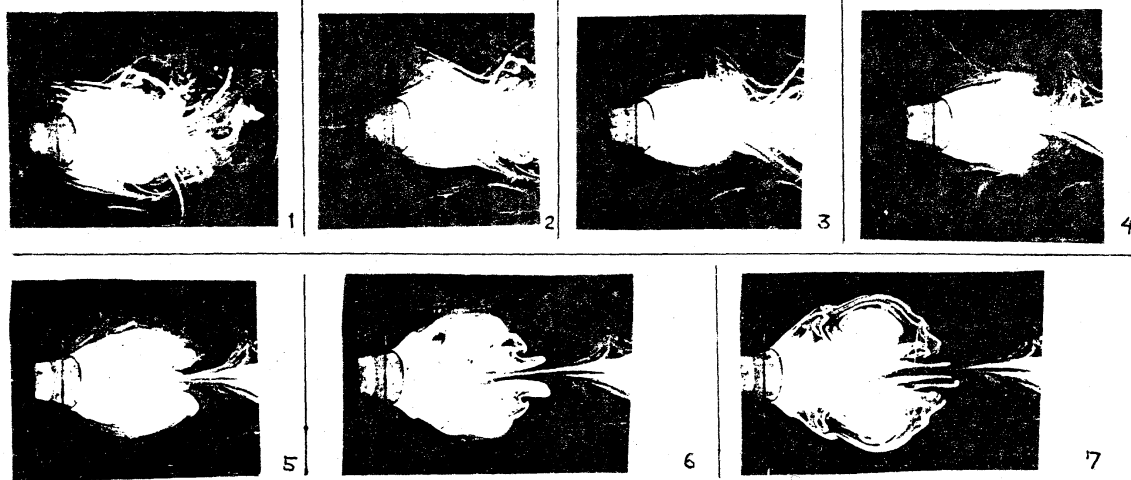


T 42.0

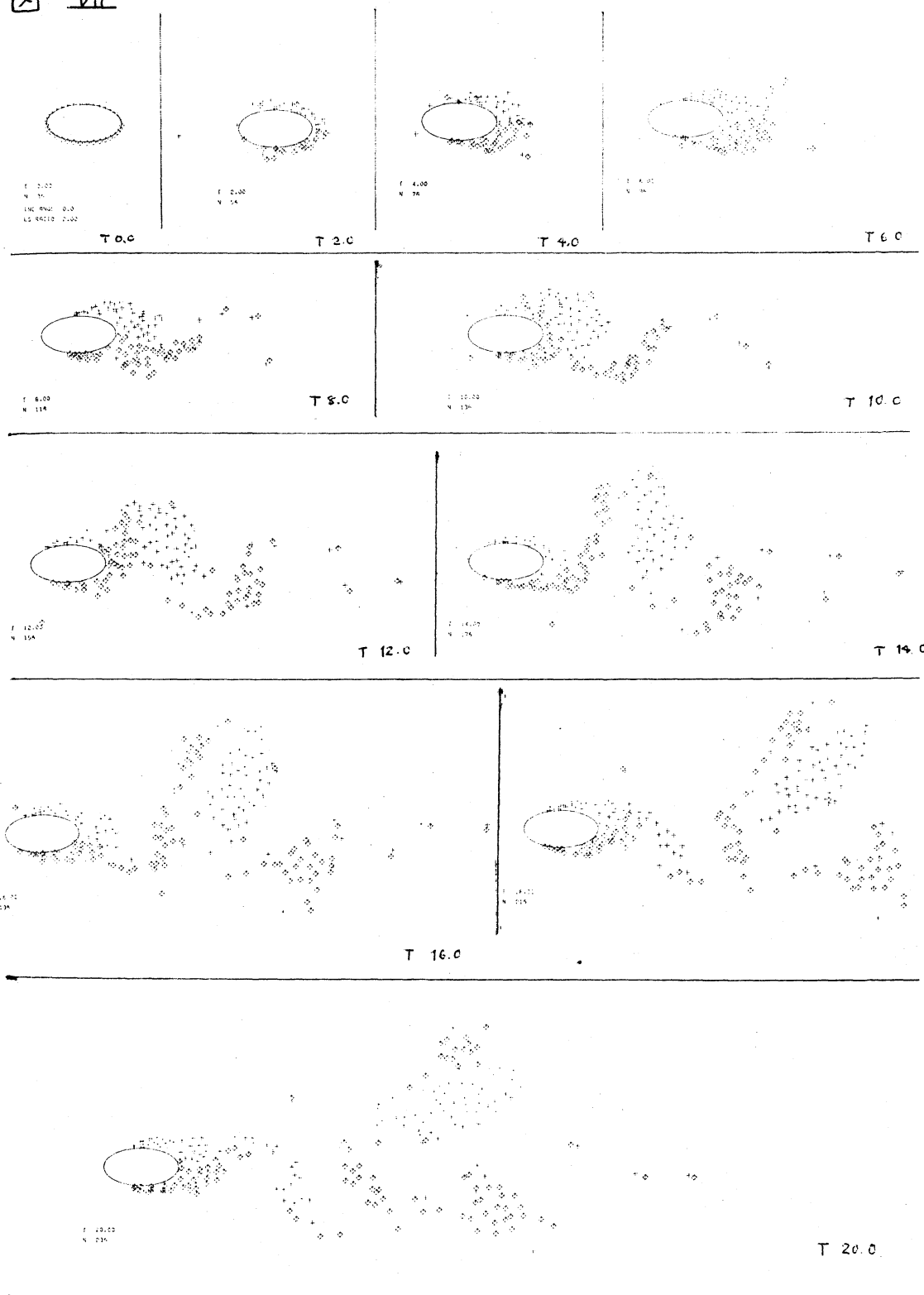


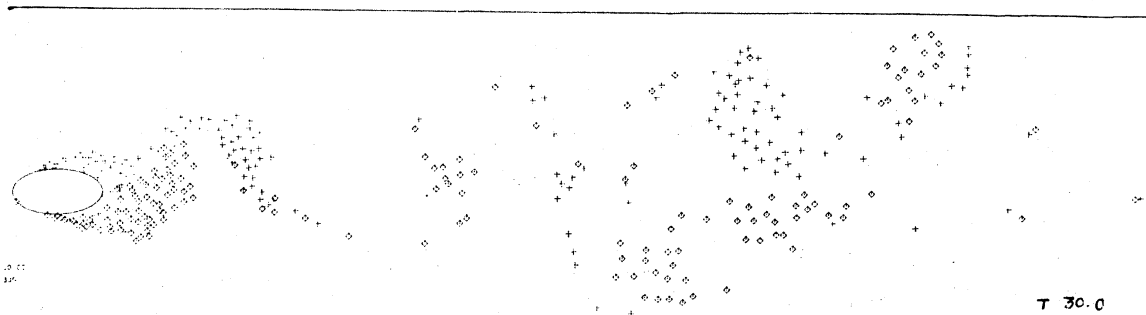
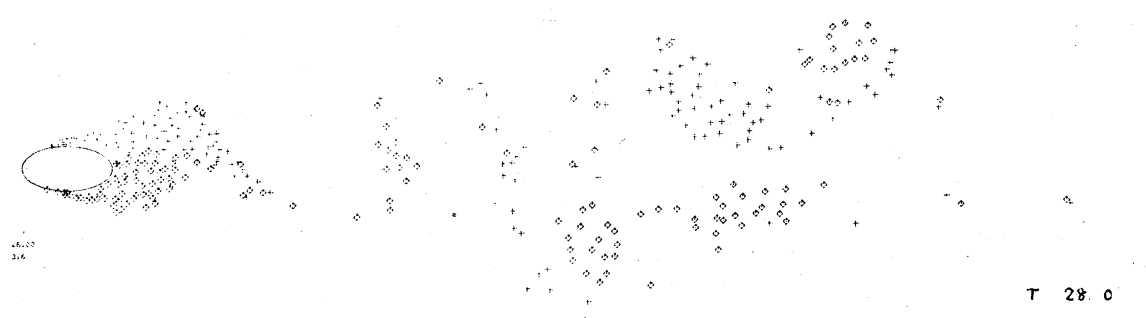
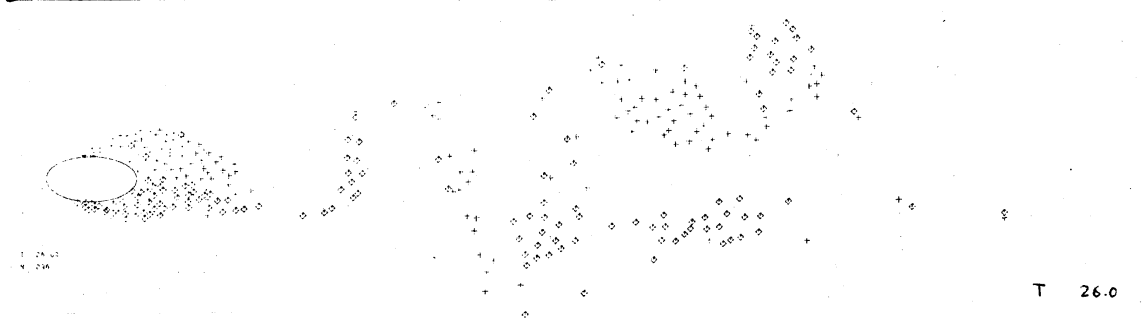
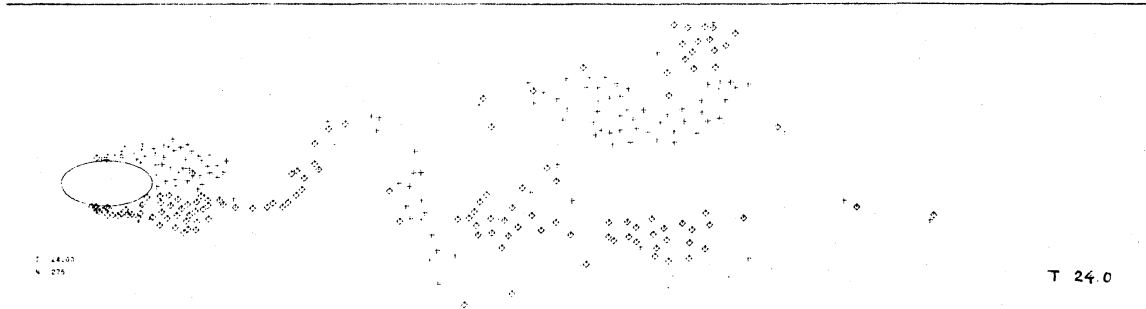
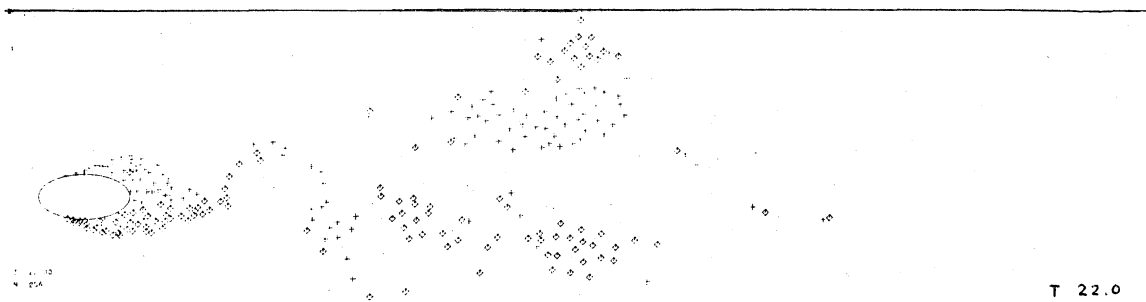
T 48.0

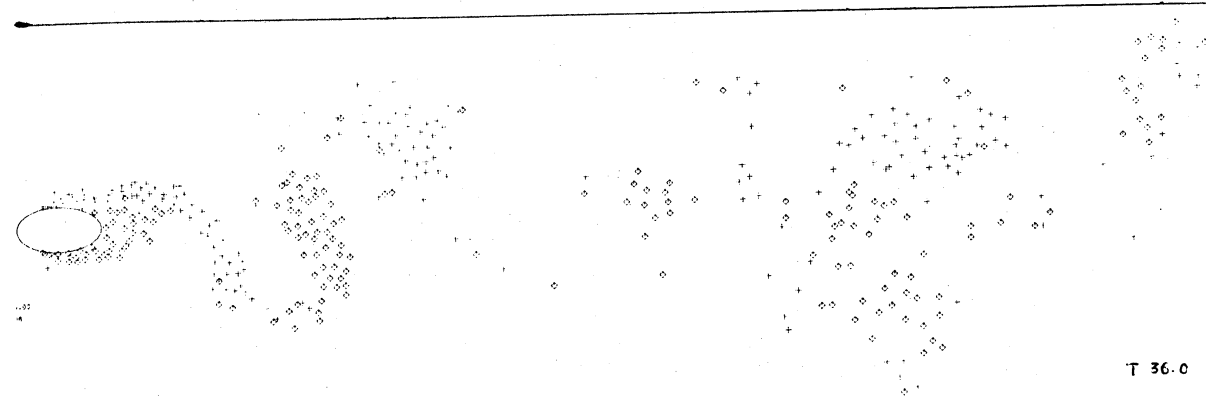
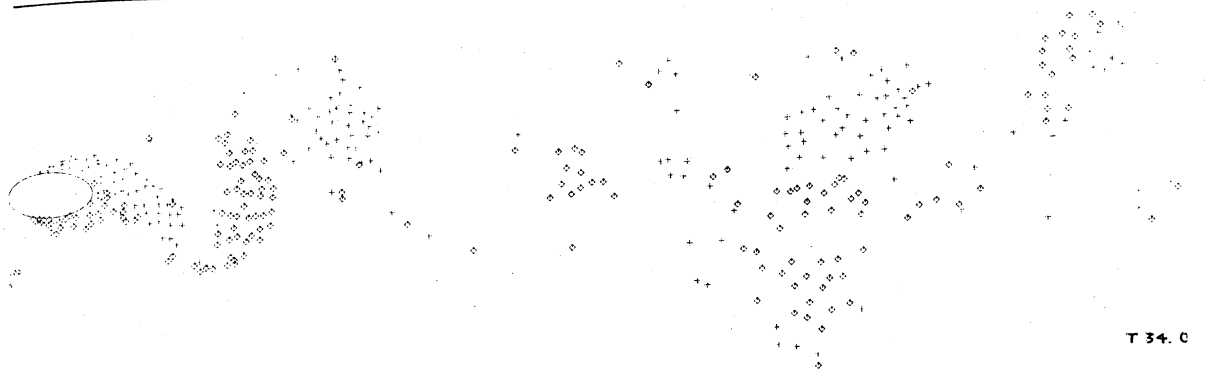
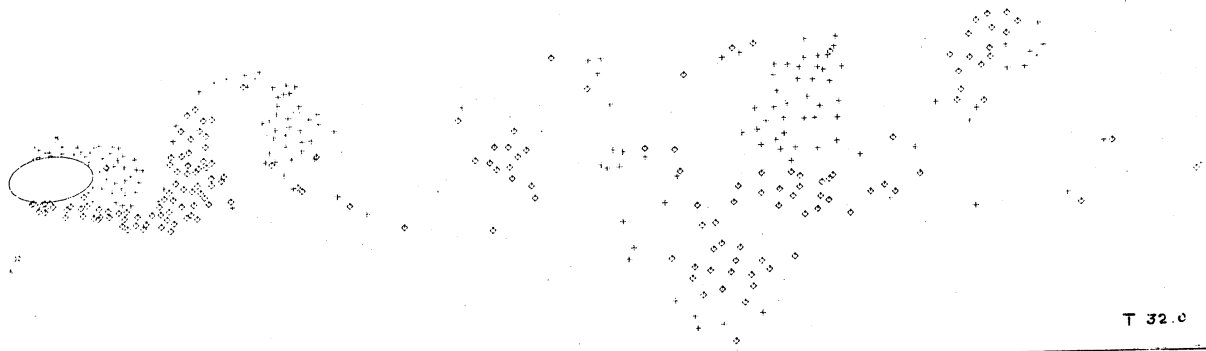
图-VI

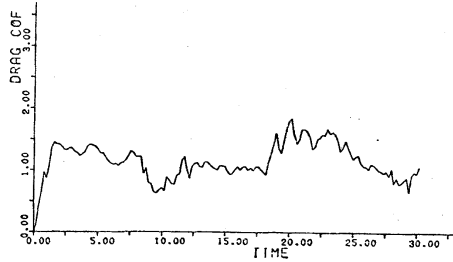
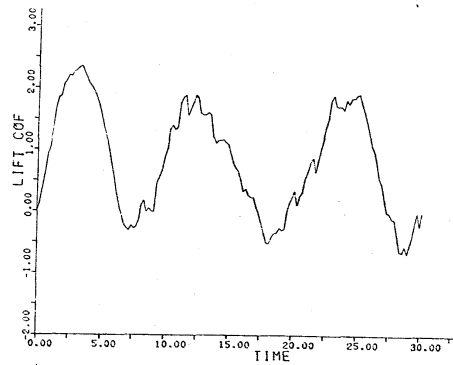


☒ - VII



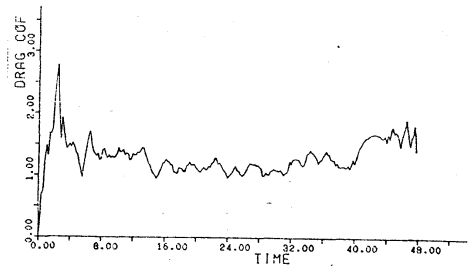
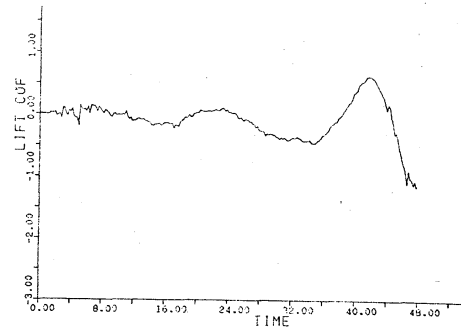






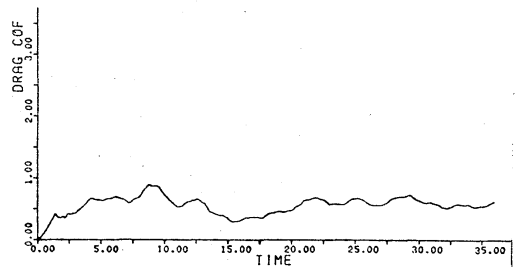
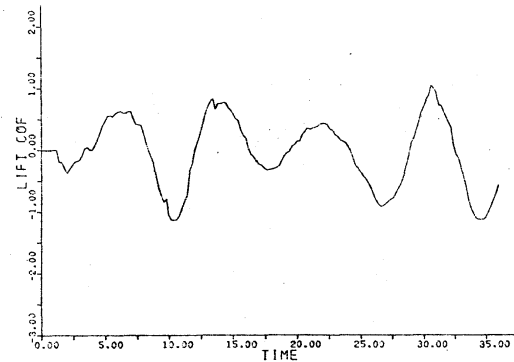
45°

図 VIII



90°

図 IX



0°

図 X

(文献)

- 1) K. Kuwahara : J. Phys. Soc. Japan 35 (1973) 1545.
- 2) T. Sarpkaya : J. Fluid Mech. 68 (1975) 109.
- 3) M. Kiya and M. Arie : J. Fluid Mech. 82 (1977) 223.
- 4) J. H. Gerrard : A.G.A.R.D. Rep. 463 (1963)
- 5) J. H. Gerrard : Phil. Trans. Roy. Soc. A261 (1967) 137.
- 6) T. Sarpkaya : J. Basic Engng. Trans A.S.M.E. D90 (1968) 511.
- 7) A.D.K. Laird : J. Hydraul. Div., Proc. A.S.C.E. HY6 (1971) 763.
- 8) J. R. Chaplin : J. Hydraul. Div., Proc. A.S.C.E. HY1 (1973) 155.
- 9) K. Kuwahara : J. Phys. Soc. Japan 45 (1978) 292.